

پردازش تصاویر دیجیتال (بخش پنجم)

تبدیل فوریه



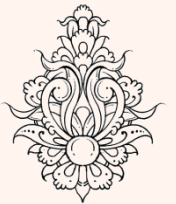
دانشگاه شهید بهشتی

پاییز ۱۴۰۳

احمد محمودی ازناوه

فهرست مطالب

- **مروری** بر آنالیز فوریه
- سیگنال‌های زمان پیوسته
 - سری فوریه
 - تبدیل فوریه
 - فاز و اندازه
- سیگنال‌های زمان گسسته
 - سری فوریه
 - تبدیل فوریه (DTFT)
 - تبدیل فوریه گسسته (DFT)





تبدیلی فوریه



The profound study of nature is the most fertile source of mathematical discoveries.

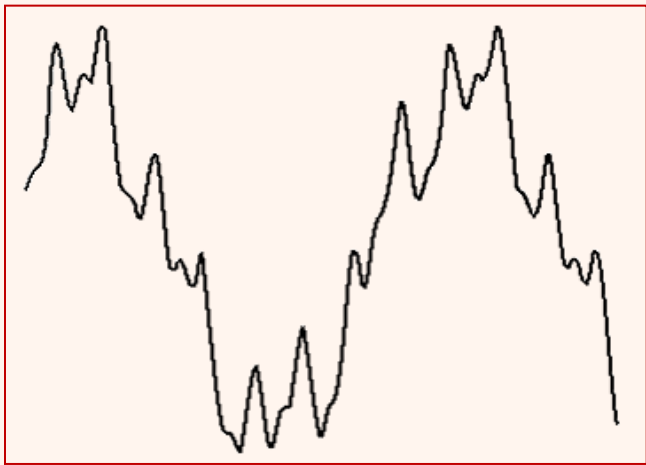
Joseph Fourier

آنالیز فوریه

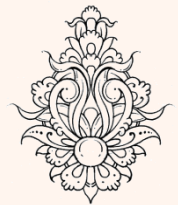
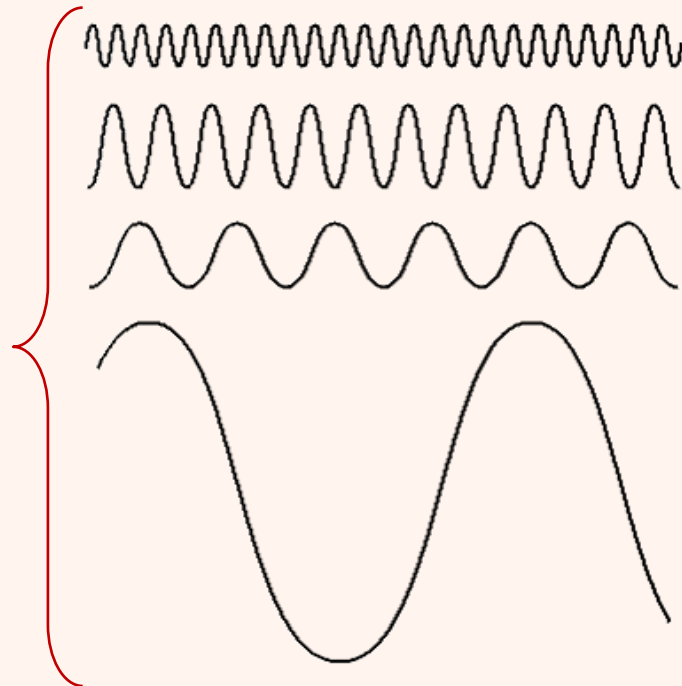
Jean Baptiste Joseph Fourier



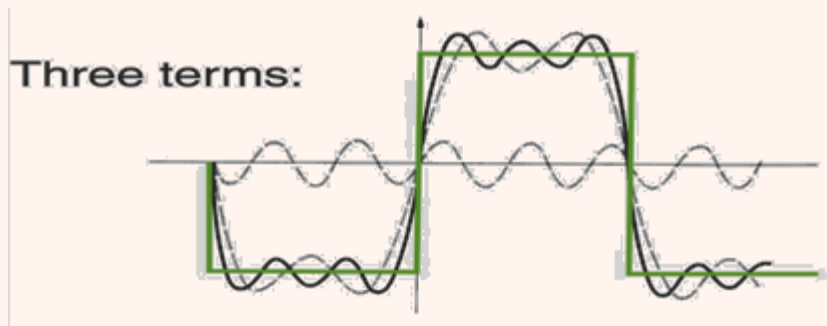
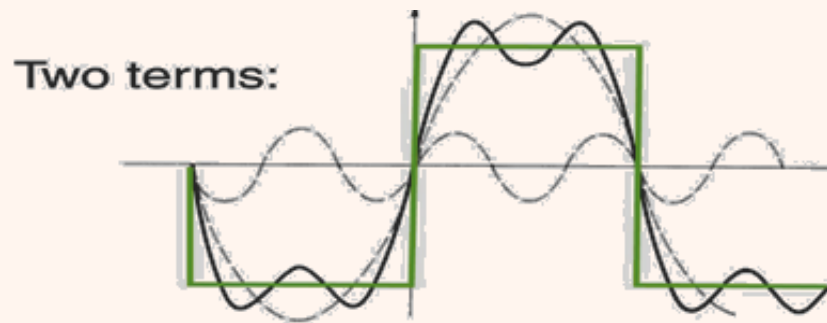
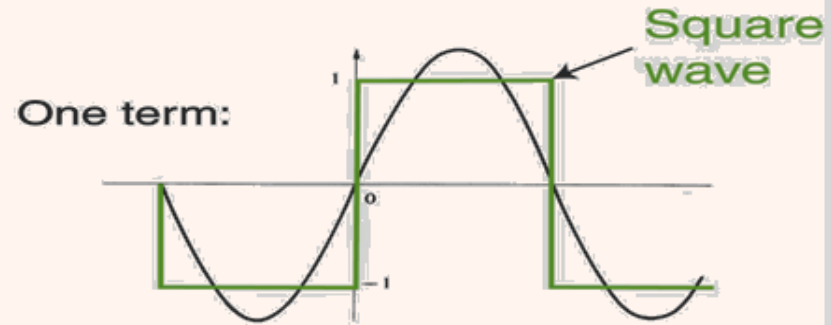
- هر تابع متناوب را می‌توان به وسیله‌ی یک جمع وزن‌دهی شده از توابع سینوسی و کسینوسی نمایش داد.



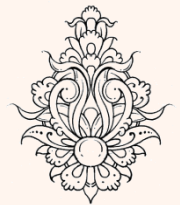
=



توابع پایه



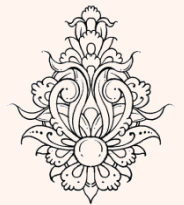
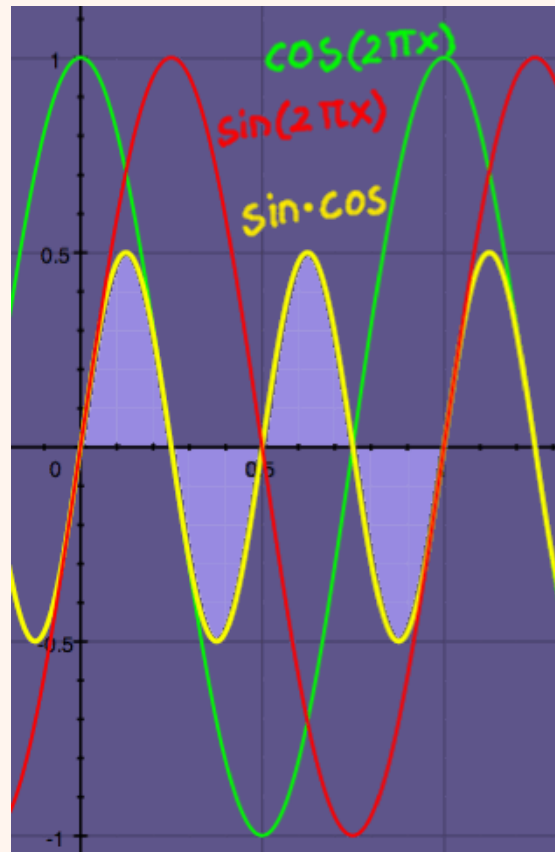
تخمین یک موج
مربعی با مجموعه‌ای
از توابع سینوسی



تعامد

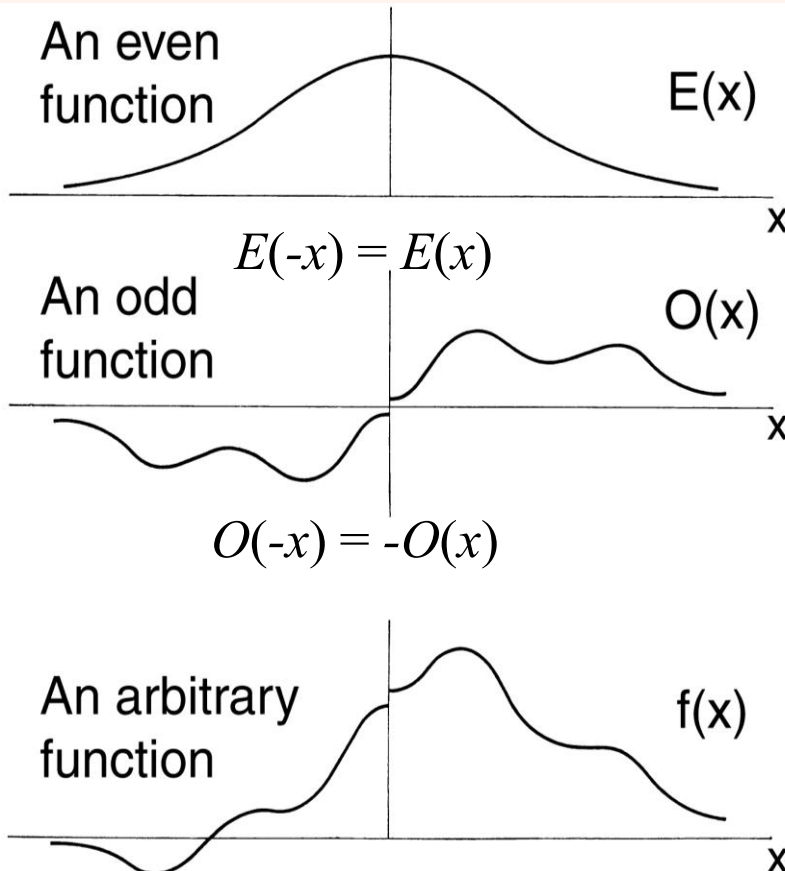
- دو تابع را برهم عمود گویند اگر داشته باشیم:

$$\langle f, g \rangle = \int f(x) g^*(x) dx = 0$$



توابع زوج و فرد

- هر تابعی را می‌توان به صورت مجموعی از توابع زوج و فرد نمایش داد:



$$E(x) \equiv [f(x) + f(-x)] / 2$$

$$O(x) \equiv [f(x) - f(-x)] / 2$$



$$f(x) = E(x) + O(x)$$



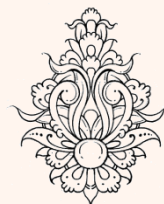
سری فوریه (ادامه...)

- چون $\cos(mt)$ یک تابع زوج است، تابع زوج $f(t)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} F_m \cos(mt)$$

- اگر فرض شود $f(t)$ در بازه‌ی $(-\pi, \pi)$ واقع شده است، برای محاسبه‌ی F_m خواهیم داشت:

$$F_m = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(mt) dt$$



سری فوریه (ادامه...)

- چون $\sin(mt)$ یک تابع فرد است، تابع فرد $f(t)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} F'_m \sin(mt)$$

- اگر فرض شود $f(t)$ در بازه $(-\pi, \pi)$ واقع شده است، برای محاسبه F'_m خواهیم داشت:

$$F'_m = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(mt) dt$$



سری فوریه (ادامه...)

- به صورت کلی برای هر تابع متناوب می‌توان رابطه‌ی زیر را در نظر گرفت:

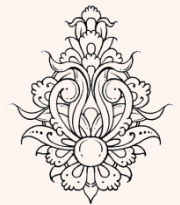
$$f(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} F_m \cos(mt) + \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} F'_m \sin(mt)$$

Even component

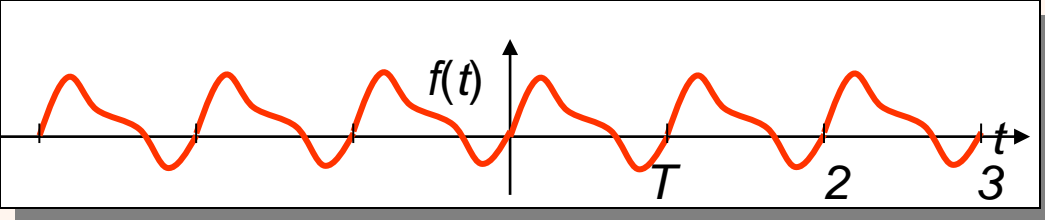
Odd component

- که ضرایب آن برابر است با:

$$F_m = \int f(t) \cos(mt) dt \quad F'_m = \int f(t) \sin(mt) dt$$



سری فوریه (ادا)



- به صورت کلی یک تابع متناوب را می توان به صورت زیر نشان داد:

$$f(t) = d + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)]$$

$$= d + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(\frac{e^{int} + e^{-int}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{int} - e^{-int}}{2i} \right) \right]$$

$$= d + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n - ib_n)}{2} e^{int} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n + ib_n)}{2} e^{-int}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

سری فوریه (ادامه...)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

where

$$c_n = \begin{cases} d & , n = 0 \\ (a_n - ib_n) / 2 & , n = 1, 2, 3, \dots \\ (a_{-n} + ib_{-n}) / 2 & , n = -1, -2, -3, \dots \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) f(t) dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) f(t) dt$$

$$d = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

ضرایب سری

n صفر است

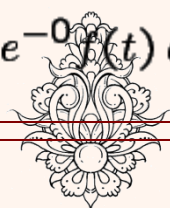
$$\begin{aligned} c_0 &= d \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-0it} f(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} (a_n - ib_n) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(nt) - i \sin(nt)] f(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t) dt \end{aligned}$$

n مثبت است

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} (a_{-n} + ib_{-n}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(-nt) + i \sin(-nt)] f(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t) dt \end{aligned}$$

n منفی است



سری فوریه (ادامه...)

n صفر است

$$\begin{aligned}c_0 &= d \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-0} f(t) dt\end{aligned}$$

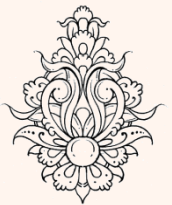
$$\begin{aligned}c_n &= \frac{1}{2} (a_n - ib_n) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(nt) - i \sin(nt)] f(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t) dt\end{aligned}$$

n مثبت است

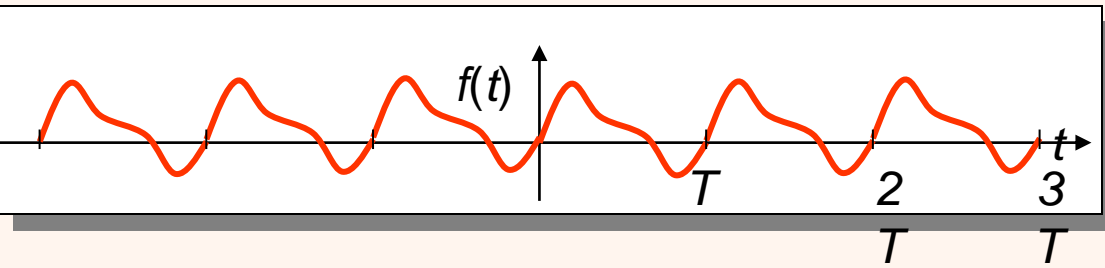
$$\begin{aligned}c_n &= \frac{1}{2} (a_{-n} + ib_{-n}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(-nt) + i \sin(-nt)] f(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t) dt\end{aligned}$$

n منفی است

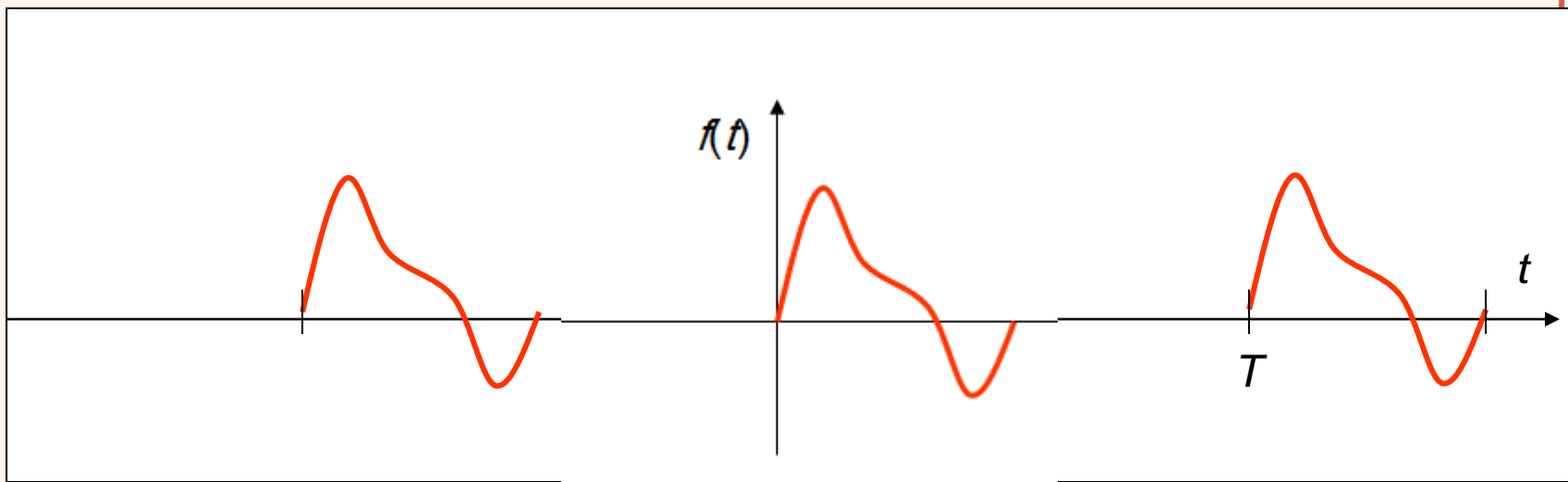
$$\begin{aligned}c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t) dt \\ f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}\end{aligned}$$



تبدیل فوریه



- سری فوریه برای سیگنال‌های **متناوب** به دست می‌آید.
- حال اگر سیگنالی پریودیک نباشد؟



اگر $T \rightarrow \infty$ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ثابت
سپید
بهشتی

تبدیل فوریه (ادامه...)

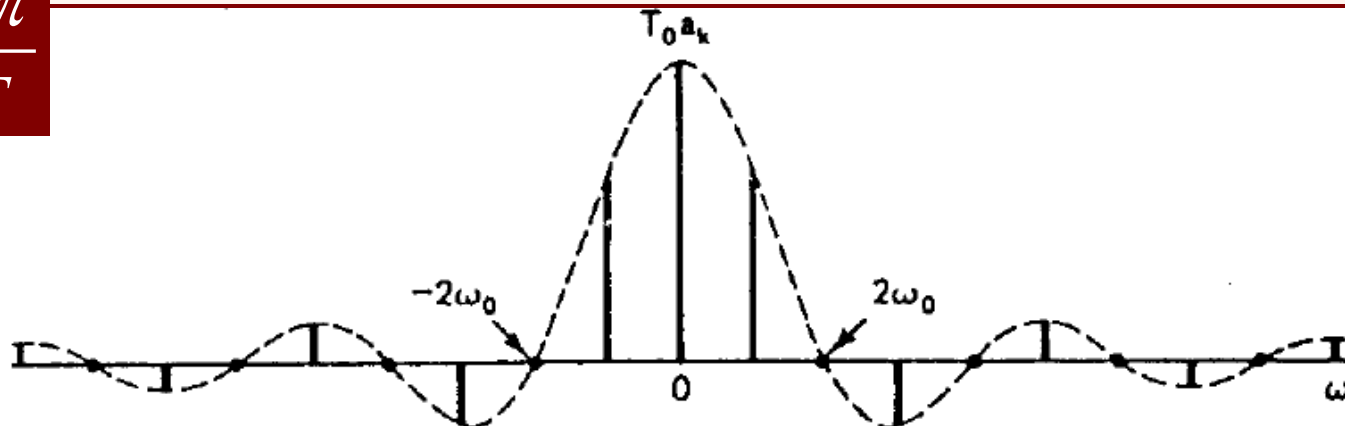
• نه تنها سیگنال‌های پریودیک را می‌توان به صورت جمع برهم‌نهی شده یک سری سیگنال سینوسی نوشت؛

– هر سیگنالی (غیر پریودیک) را هم می‌توان این گونه دید.

– سیگنال را متناوب کرده از آن سری می‌گیریم.

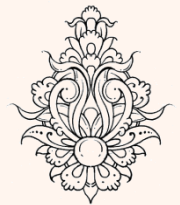
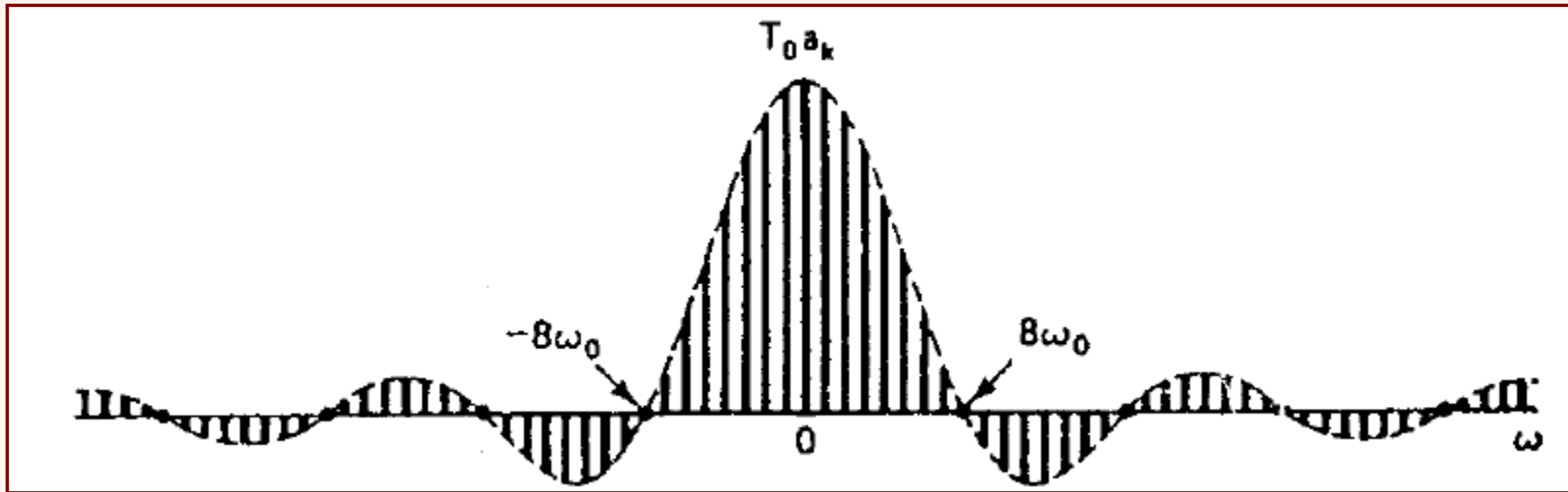
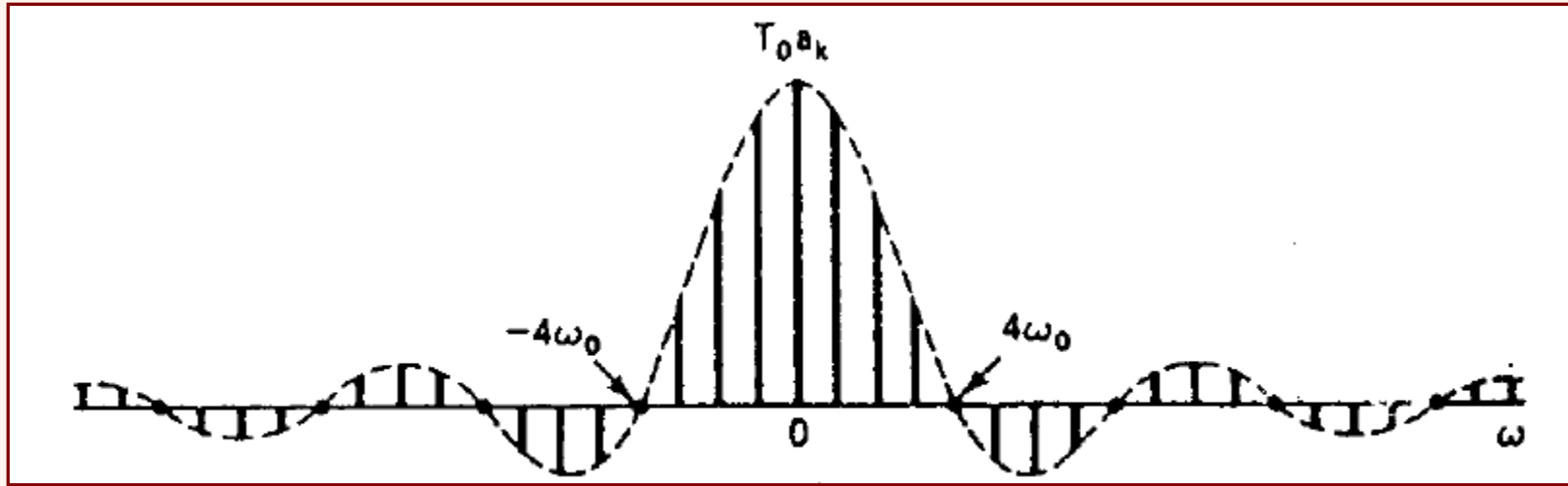
– پریود را به بی نهایت میل می‌دهیم.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$



تازشکا
بهبشتو

تبدیل فوریه (ادامه...)



تبدیل فوریه و معکوس تبدیل

• برای تبدیل مستقیم و معکوس خواهیم داشت:

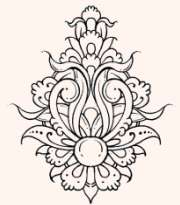
رابطه آنالیز

$$\mathcal{T}\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt$$

رابطه سنتز

$$\mathcal{T}\{F(\omega)\} = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

• $F(\omega)$ را تبدیل فوریه $f(t)$ می‌نامند، که در این حالت $f(t)$ در دامنه‌ی زمان و $F(\omega)$ در دامنه‌ی فرکانس خواهد بود.

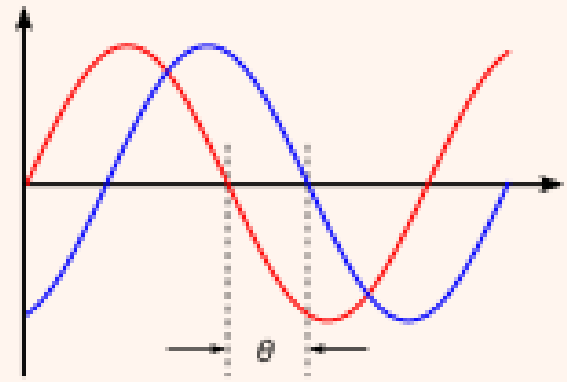
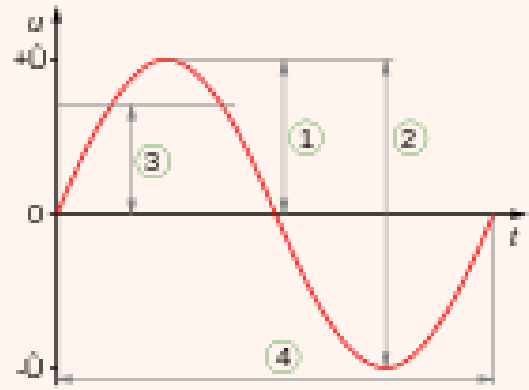
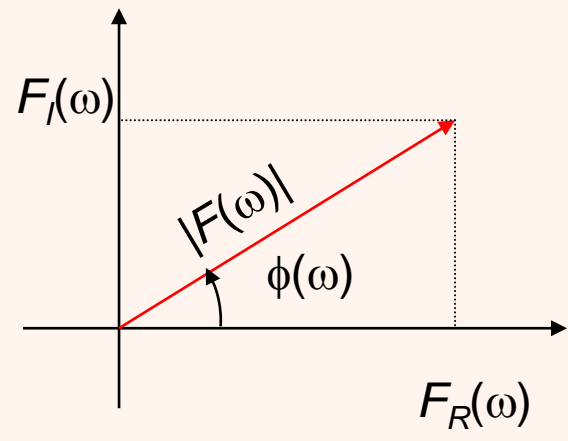


فاز و اندازه

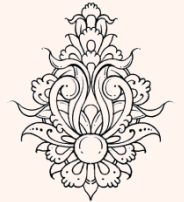
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$F(\omega) = F_R(\omega) + jF_I(\omega)$$

$$= \underbrace{|F(\omega)|}_{\text{Magnitude}} \underbrace{e^{j\phi(\omega)}}_{\text{Phase}}$$



$$\mathfrak{I}\{F(\omega)\} = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$



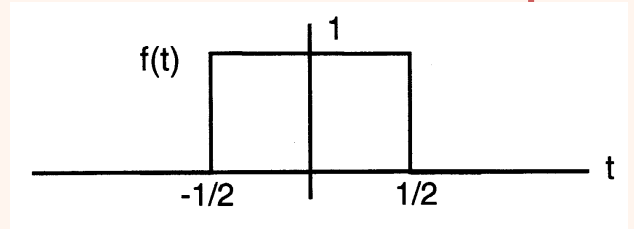
تبدیل فوریه پالس مربعی

$$F(\omega) = \int_{-1/2}^{1/2} \exp(-i \omega t) dt = \frac{1}{-i \omega} [\exp(-i \omega t)]_{-1/2}^{1/2}$$

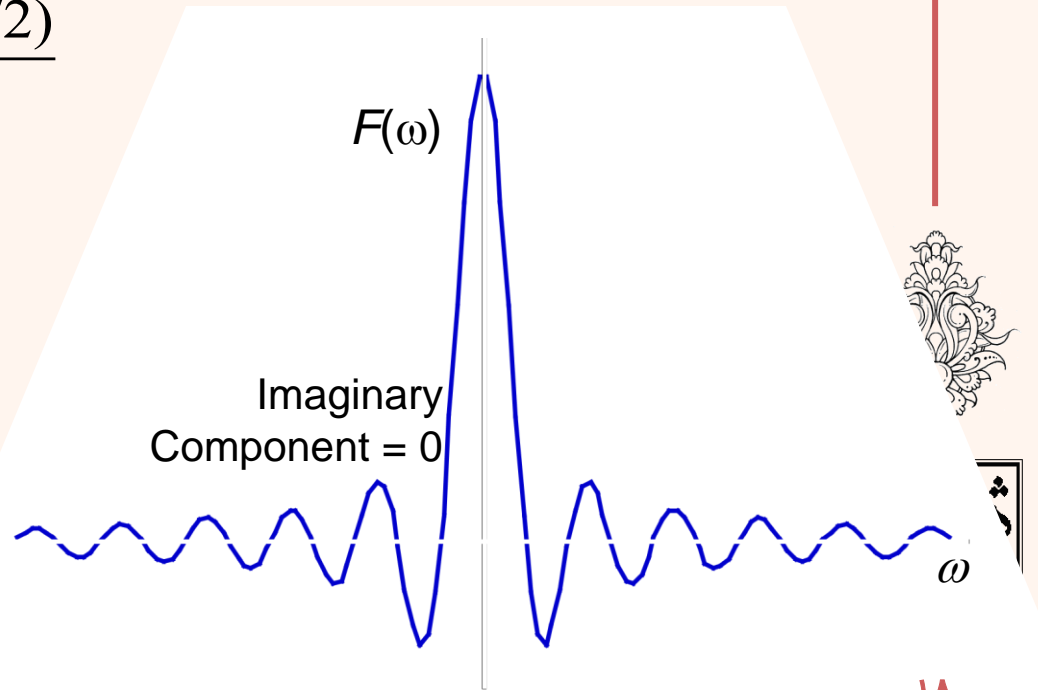
$$= \frac{1}{-i \omega} [\exp(-i \omega / 2) - \exp(i \omega / 2)]$$

$$= \frac{1}{(\omega/2)} \frac{\exp(i \omega / 2) - \exp(-i \omega / 2)}{2i}$$

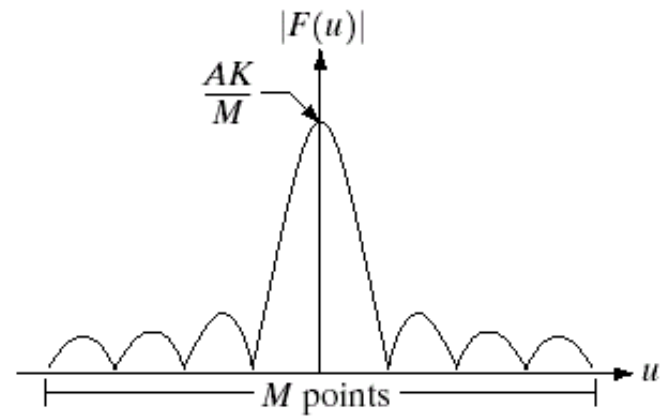
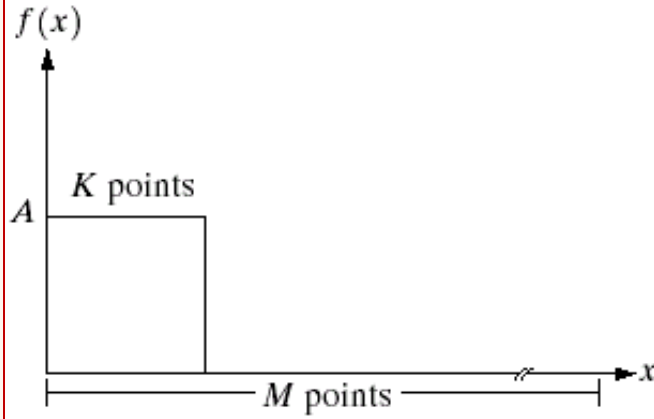
$$= \frac{\sin(\omega/2)}{(\omega/2)}$$



$$F(\omega) = \text{sinc}(\omega/2)$$

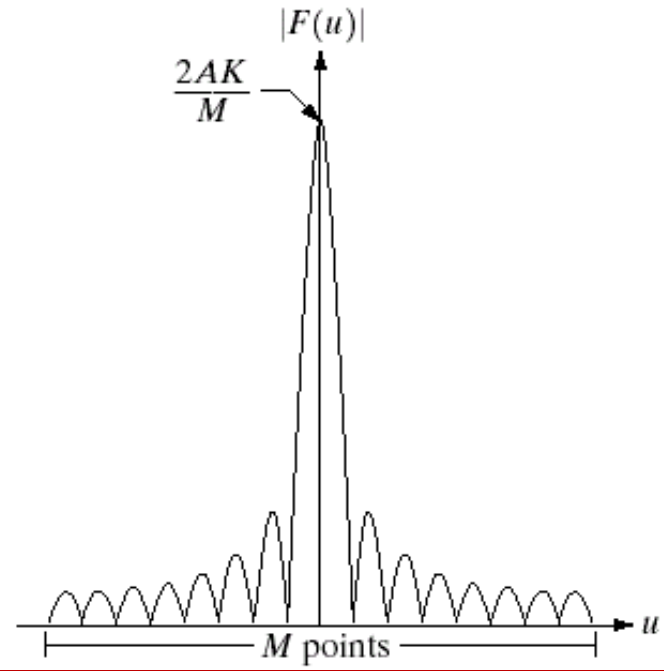
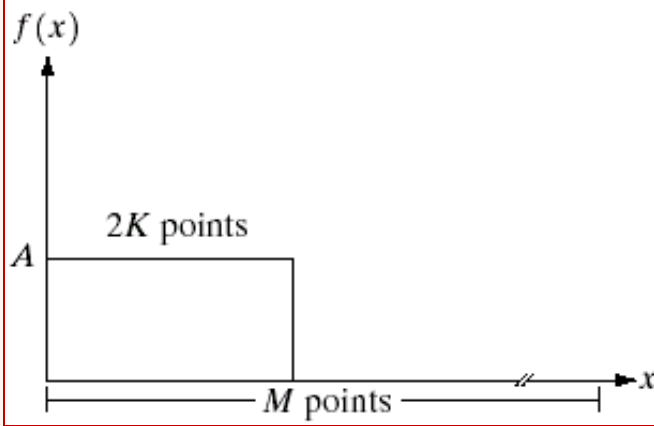


تبدیل فوریه پالس مربعی

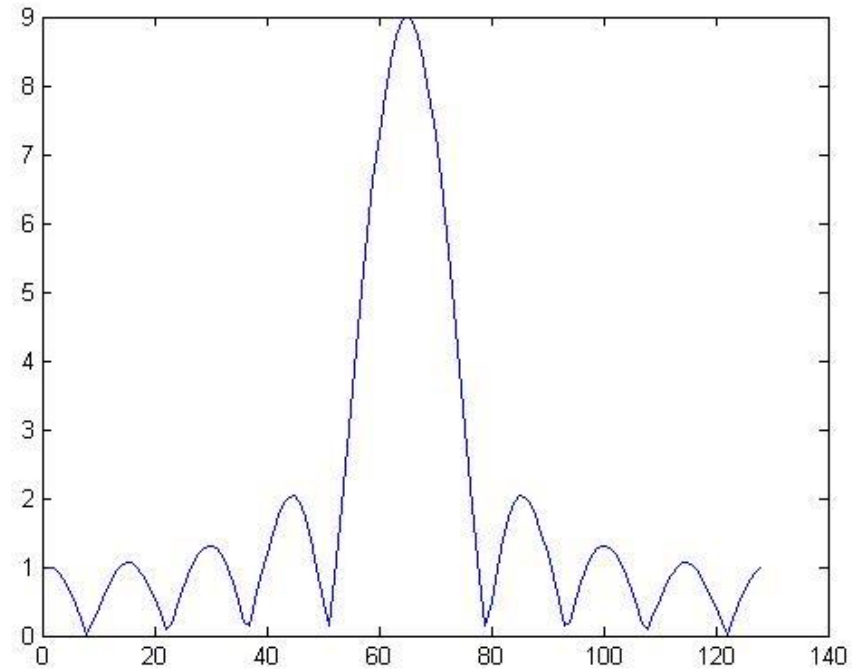
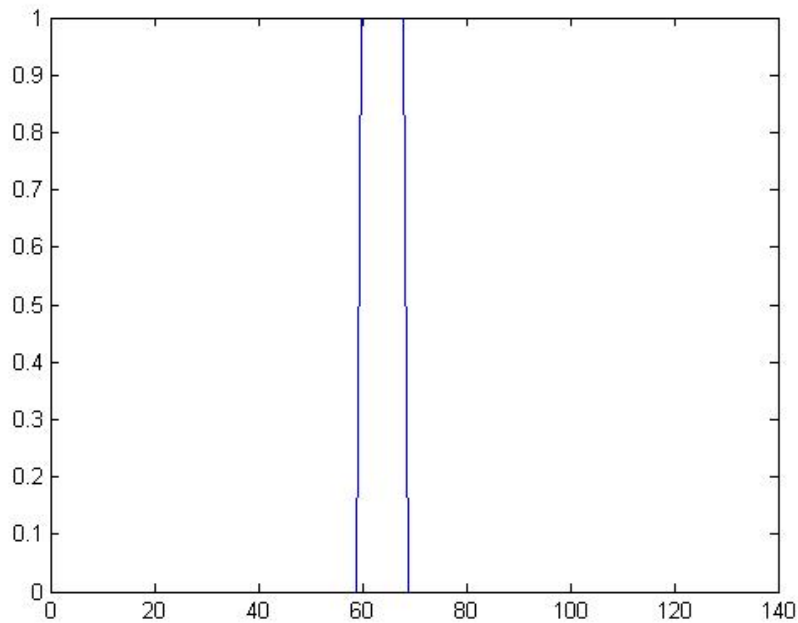


a	b
c	d

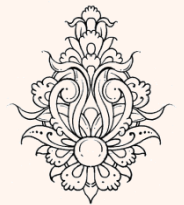
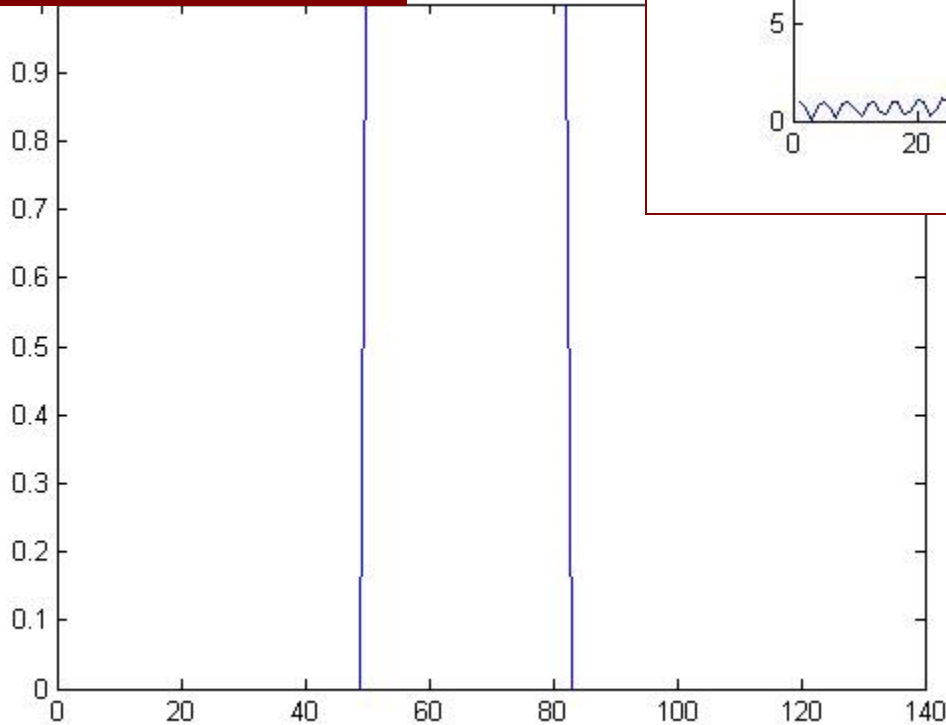
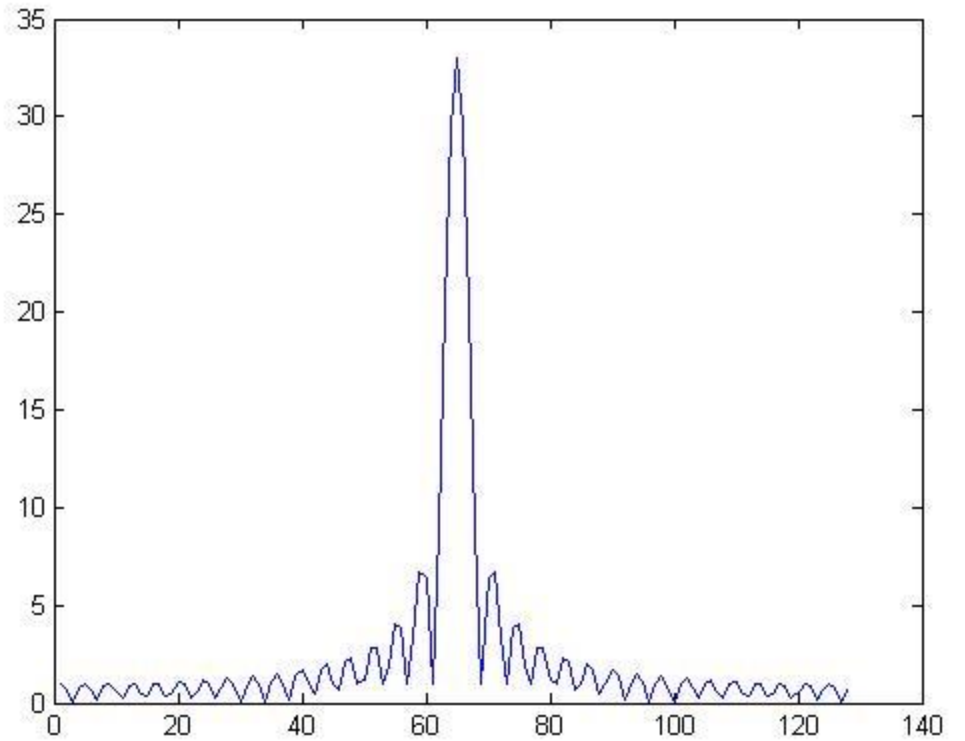
FIGURE 4.2 (a) A discrete function of M points, and (b) its Fourier spectrum. (c) A discrete function with twice the number of nonzero points, and (d) its Fourier spectrum.



```
x=zeros(1,128);  
x(60:68)=1;  
k=fft(x,128);  
q=fftshift(k)  
plot(x);  
figure;  
plot (abs(q))
```



```
x=zeros(1,128);  
x(50:82)=1;  
k=fft(x,128);  
q=fftshift(k)  
plot(x);  
figure;  
plot (abs(q))
```



تبدیل فوریه دو بعدی و معکوس آن

$$\mathfrak{T}\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt$$

تبدیل فوریه یک بعدی

$$\mathfrak{T}\{F(\omega)\} = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

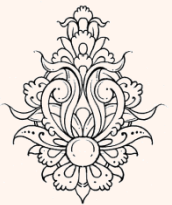
تبدیل معکوس یک بعدی

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-j(ux + vy)) dx dy$$

تبدیل فوریه دو بعدی

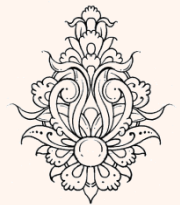
$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) \exp(j(ux + vy)) du dv$$

تبدیل معکوس دو بعدی



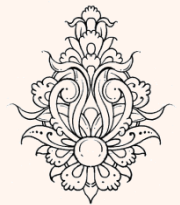
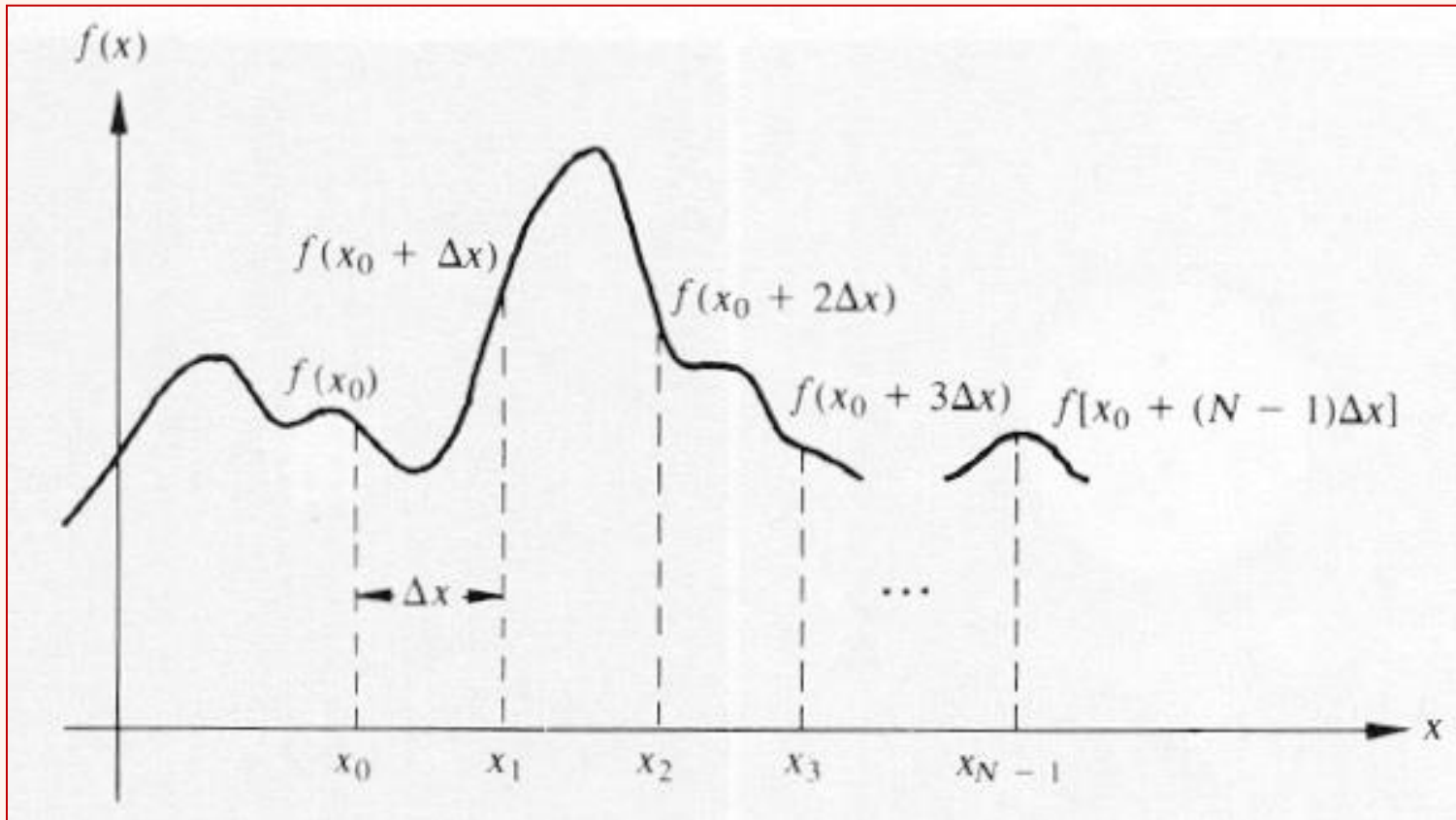
نگات

- اگر ورودی تبدیل فوریه (به طور مثال سیگنالی صوتی) در دامنه‌ی زمان-مکان باشد، نمونه‌های سیگنال مذکور به دامنه‌ی فرکانس (شامل دامنه و فاز) نگاشت می‌یابد.
 - تبدیل محکوس نیز با دریافت دامنه و فاز، سیگنال اصلی (در دامنه‌ی مکان-زمان) را بازیابی می‌نماید.
 - دو نگاشت محکوس یکدیگرند.
 - با توجه به کاربرد روزافزون سیگنال‌های دیجیتال استفاده از تبدیل سیگنال پیوسته کارایی لازم را ندارد. نسخه‌ی **گسسته‌ی تبدیل** لازم است.
- تبدیلی که روی سیگنال‌های گسسته اعمال شود.



سیگنال‌های گسسته

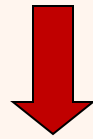
- تابع پیوسته‌ی $f(x)$ را می‌توان به صورت زیر گسسته گرفت:



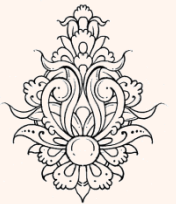
سیگنال‌های گسسته (ادامه...)

- اگر مقادیر x را به صورت صحیح و در بازه‌ی $(x=0,1,2,\dots, M-1)$ در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$\{f(x_0), f(x_0 + \Delta x), f(x_0 + 2\Delta x), \dots, f(x_0 + (M-1)\Delta x)\}$$



$$\{f(0), f(1), f(2), \dots, f(M-1)\}$$



سری فوریهی سیگنال‌های زمان گسسته

- برای سیگنال‌های **گسستهی متناوب** هم می‌توان سری فوریه را تعریف کرد، البته سری فوریهی سیگنال‌های گسسته با سری فوریهی سیگنال‌های پیوسته تفاوت‌های اساسی دارد:

$$f[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n}$$

$$X(K) = \sum_{n=0}^{N_0-1} \alpha(K, n) x(n)$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} f[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} f[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}$$

- به نظر شما تبدیل فوریهی سیگنال گسسته چگونه به دست می‌آید؟



مفهوم فرکانس در فضای گسسته

$$a_k \times e^{j\omega} \quad \left| \quad \omega = \frac{2\pi}{N}k$$

$$a_0 \times e^{j0}$$

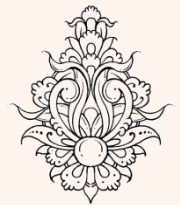
$$a_1 \times e^{j\frac{2\pi}{N}}$$

$$a_2 \times e^{j\frac{2\pi \times 2}{N}}$$

.....

$$a_N \times e^{j\frac{2\pi \times N}{N}}, e^{j\frac{2\pi \times N}{N}} = e^{j2\pi} = e^{j0}$$

$$f[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$



در سیگنال‌های گسسته حداکثر فرکانس π می‌باشد.

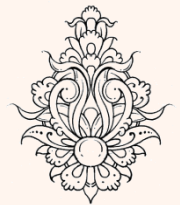
تبدیل فوریه سیگنال‌های گسسته (DTFT)

- به طریق مشابه برای سیگنال‌های گسسته، تبدیل فوریه تعریف می‌شود:

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)e^{-j\omega n} \quad T=2\pi$$

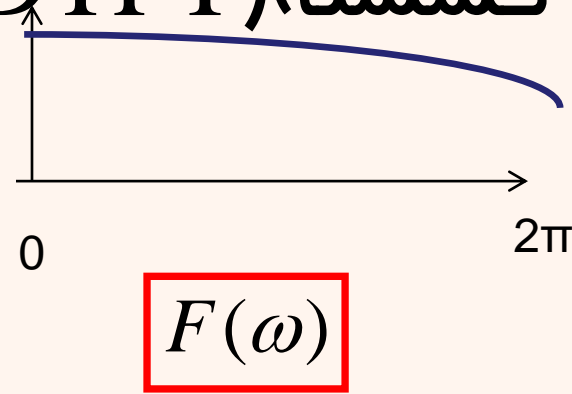
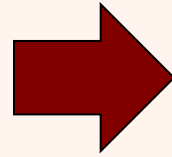
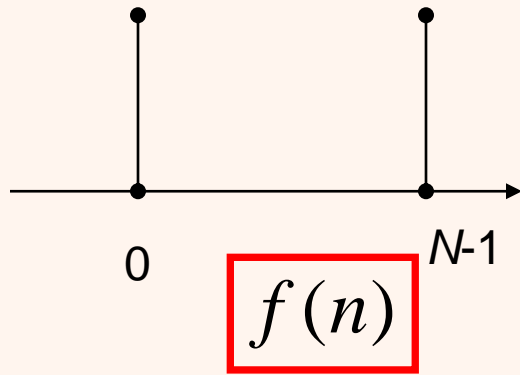
DTFT (Discrete Time Fourier Transform)

- چنانچه ملاحظه می‌شود، حاصل تبدیل پیوسته است!
– جهت کاربردهای مختلف (استفاده از قابلیت‌های رایانه‌های دیجیتال) عموماً تبدیل پیوسته مفید نبوده، نیاز به اعمال نسخه‌ی گسسته از تبدیل است.
- بدین منظور از سیگنال گسسته تبدیل فوریه گرفته در فرکانس‌های $(2k\pi/N)$ نمونه برداری می‌کنیم.

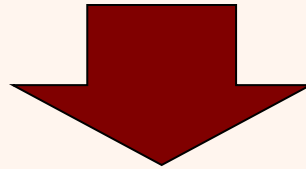


بديلي فورييه سليختان هاي

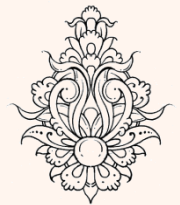
گسسته (DTFT)



$$F(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-j\omega n} \quad T=2\pi$$



$$F(\omega) \Big|_{\omega=\frac{2k\pi}{N}} \Rightarrow F(K) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-j\frac{2k\pi}{N}n} \quad K = 0, \dots, N-1$$



تبدیل فوریه گسسته

DFT (Discrete Fourier Transform)

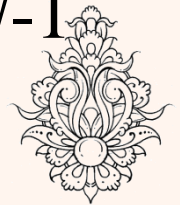
- برای تبدیل فوریه گسسته که از نمونه برداری تبدیل فوریه سیگنال به دست می آید، خواهیم داشت:

$$F(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \exp(-j2\pi kn / N)$$

$$k=0,1,2,\dots,N-1$$

$$f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} F(k) \exp(j2\pi kn / N)$$

$$n=0,1,2,\dots,N-1$$

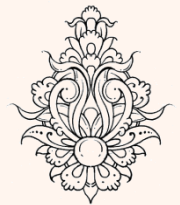
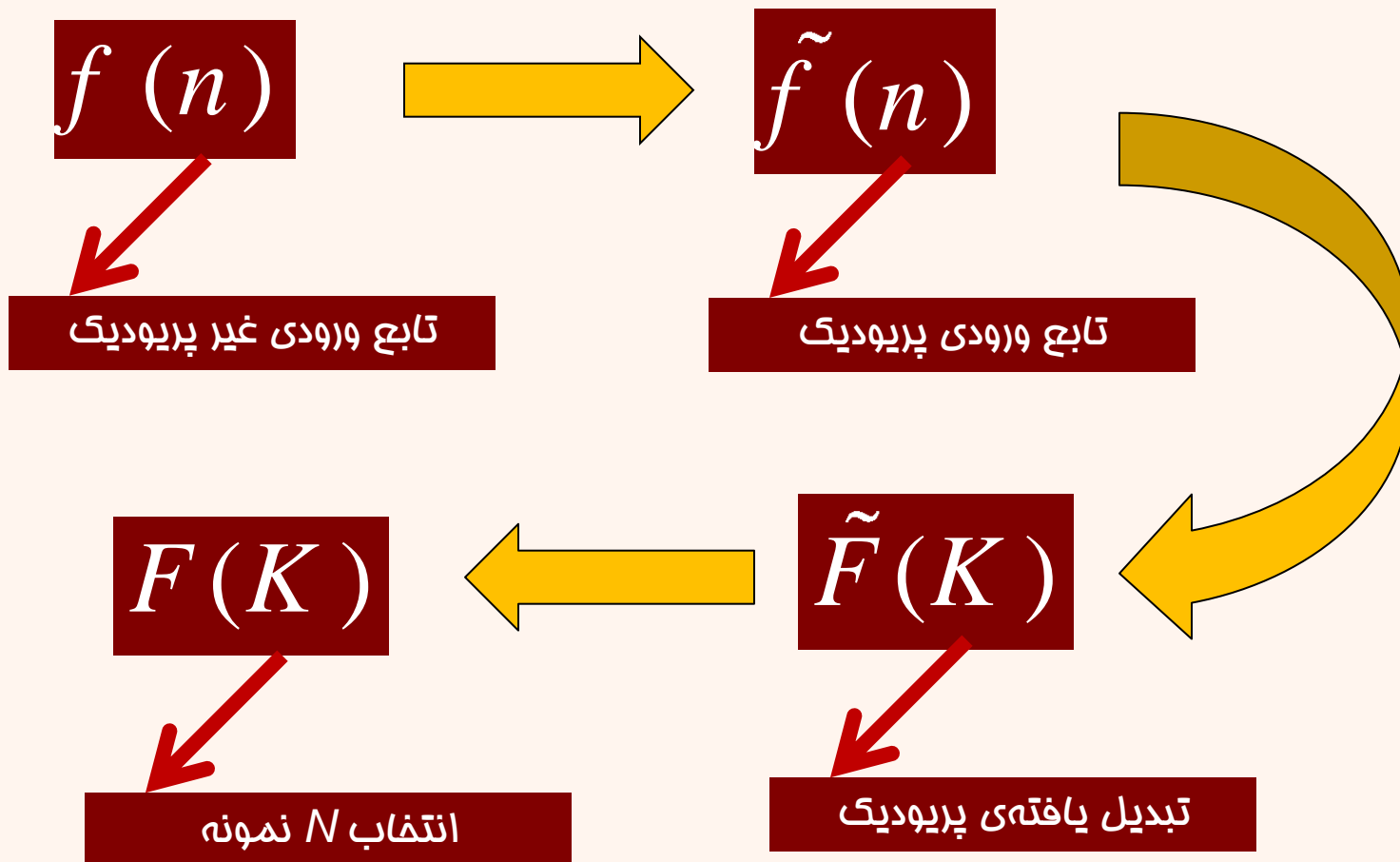


در **DFT** ، $\omega = 2\pi k / N$ در نظر گرفته می شود، یعنی به ازای $0 \rightarrow N-1$ می باید **N** نمونه ی متمایز وجود داشته باشد.



فرآیند محاسبه‌ی DFT

به گونه‌ای دیگر می‌توان به DFT نگاه کرد:
سیگنال در دامنه‌ی مکان را به صورت متناوب درآمده و سپس از آن
تبدیل فوریه گرفته می‌شود.



تبدیل فوریه گسسته (ادامه...)

- برای محاسبات کامپیوتری از تبدیل گسسته فوریه (DFT) استفاده می‌شود.
- به همین جهت برای پردازش تصویر دیجیتال هم خواهیم داشت:
- همانند تبدیل گسسته فوریه یک بعدی می‌باید ماتریس تصویر ابتدا متناوب گردد.

